LOS GRAFOS Y EL AUTOCAD

Martín Benarroch, Leonard L. Echague, Juan Gil y Vera W. de Spinadel

Centro de Matemática y Diseño MAyDI

Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo - Universidad de Buenos Aires

José M. Paz 1131 - 1602 Florida - Buenos Aires - Argentina

E-mail: postmaster@caos.uba.ar vwinit@huiyin.fadu.uba.ar

RESUMEN

El grafo bipartito $K_{3,3}$, más conocido por el problema de las tres casas conectadas a tres servicios, es no plano. Vale decir, no es posible encontrar ninguna representación isomorfa en el plano, tal que sus aristas se crucen solamente en los vértices: inevitablemente terminan cruzándose por lo menos dos aristas.

Si pasamos a un espacio de tres dimensiones y consideramos los seis vértices del grafo $K_{3,3}$, se forman nueve paraboloides hiperbólicos, tomando cuatro de esos seis vértices cada vez. Dichos paraboloides hiperbólicos se cortan de a dos, determinando interesantes curvas cuyas propiedades se estudian con la ayuda del AUTOCAD , del MAPLE-V, el 3D-Studio.

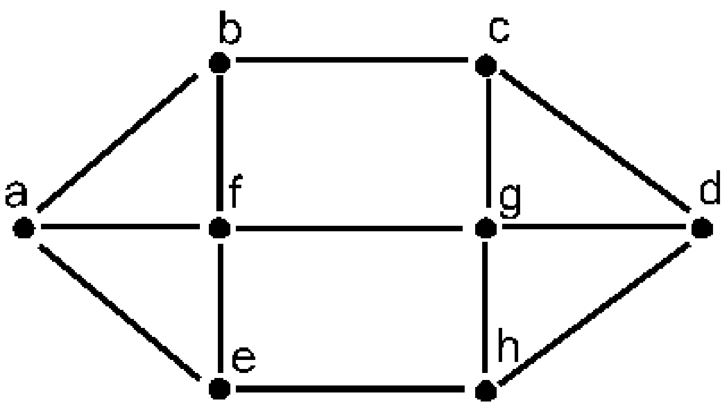
1. INTRODUCCION

La teoría de grafos es una rama de la Investigación Operativa que se aplica en el tratamiento de diversos problemas del campo tecnológico, sociológico y económico. Históricamente, está comprobado que el hombre, ante el planteo de un problema, tiende a dibujar un diagrama en el que los puntos pueden representar actividades, etapas de un proyecto, individuos, localidades, etc., uniéndolos por medio de líneas que indican la existencia de una cierta relación entre ellos. Tales diagramas reciben el nombre de **"grafos"**, según la propuesta efectuada por el matemático alemán D. König en 1936.

Evidentemente, el dibujo de un grafo no es de ningún modo un problema métrico. Esto implica que la longitud de las líneas que unen los distintos puntos es cualquiera, importando solamente la visualización clara y precisa de relaciones, interacciones, etc.

En forma rigurosa, diremos que un ***"grafo"*** es una terna G = (V, A, ϕ), donde V y A son conjuntos finitos y ϕ es una aplicación que hace corresponder a cada elemento de A un par de elementos de V. Los elementos de V son los ***"vértices"*** de G; los elementos de A son las ***"aristas"*** de G y ϕ es la "***aplicación de incidencia" ,*** que asocia a cada arista sus dos vértices.

Si analizamos los dos grafos de la Fig. 1.1, a primera vista podemos pensar que son diferentes pero sin embargo, tienen muchas características en común.



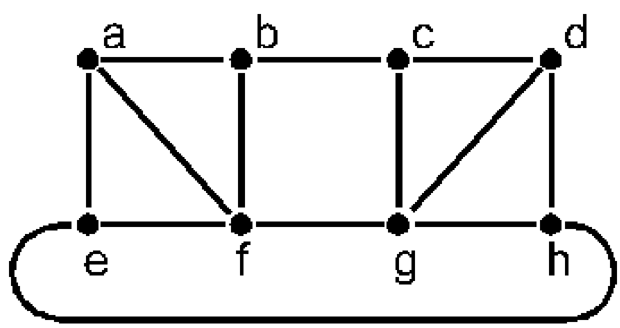
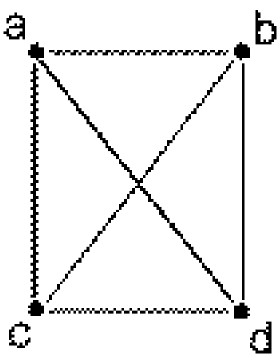


Fig 1.1

En efecto, ambos poseen 8 vértices y 13 aristas. También aparecen en ambos 2 cuadriláteros y 4 triángulos y si elegimos un par de aristas adyacentes en uno de los grafos, las aristas correspondientes del otro grafo son también adyacentes. Lo mismo sucede con los vértices. Esto implica que son dos imágenes diferentes de un mismo grafo y se dice que son ***"isomorfos".***

A nivel gráfico, debe tratarse de trabajar con los esquemas más simples entre todas lasrepresentaciones isomorfas de un mismo grafo.

La posibilidad de realizar geométricamebnte ciertos grafos en el plano, está ligada intrínsecamente a características del plano y de dichas configuraciones. Diremos que un grafo es ***"plano"*** si existe un grafo isomorfo que puede dibujarse en el plano, de modo que las aristas solamente se crucen en los vértices, sin excepción alguna. Por ejemplo, los grafos de la Fig. 1.2a y 1.2b aparentemente no son planos, pues sus aristas se cortan. Sin embargo, es muy fácil encontrar dos grafos isomorfos a los anteriores en los que esto no sucede (Fig. 1.3a y 1.3b). Por ello, los grafos de las Fig. 1.2a y 1.2b son planos.



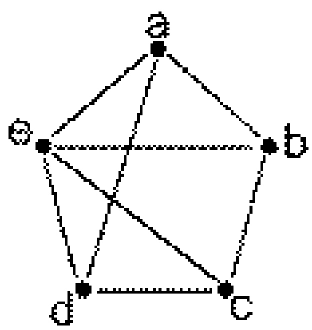
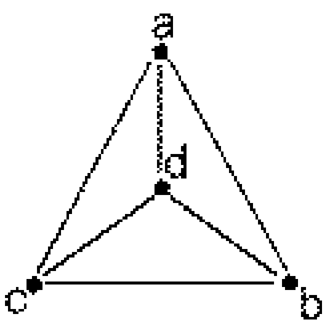


Fig. 1.2a Fig. 1.2b



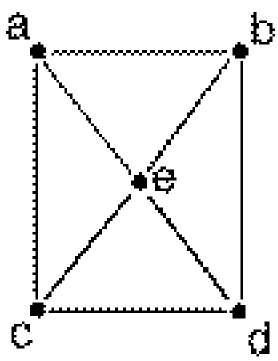
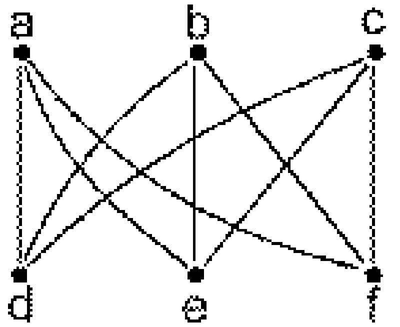


Fig. 1.3a Fig. 1.3b

El problema estriba en encontrar un método eficaz para reconocer la planitud de un grafo, sin recurrir a todas sus posibles representaciones isomorfas. Este difícil problema fue resuelto teóricamente en 1930 por Kasimierz Kuratowski, matemático polaco que descubrió que existen tan solo dos grafos no planos, el correspondiente al problema de las tres casas y las tres utilidades $K_{3,3}$ (Fig. 1.4) y el grafo de cinco vértices tales que cada vértice está conectado con los restantes K_5 (Fig. 1.5).



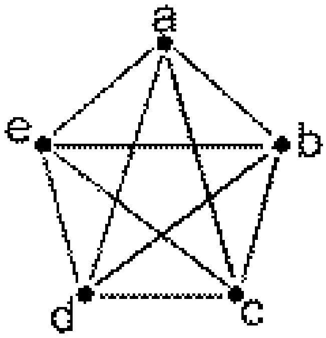
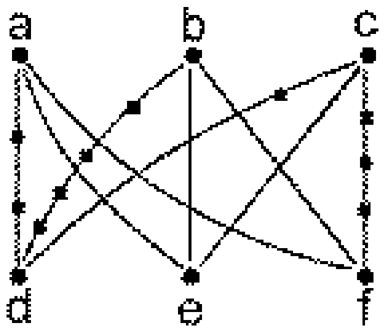


Fig. 1.4 Fig. 1.5

Ambos grafos permiten definir toda una familia de grafos que son planos: basta con colocar sobre cada arista tantos vértices como uno quiera para definir otros grafos no planos, que son del tipo $K_{3,3}$ o del tipo K_5 (ver Fig. 1.6a y 1.6b).



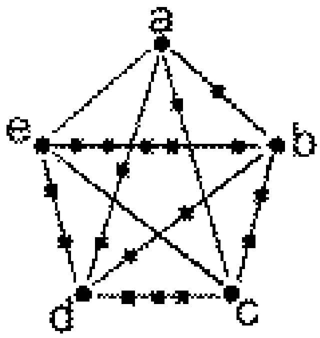


Fig. 1.6a Fig. 1.6b

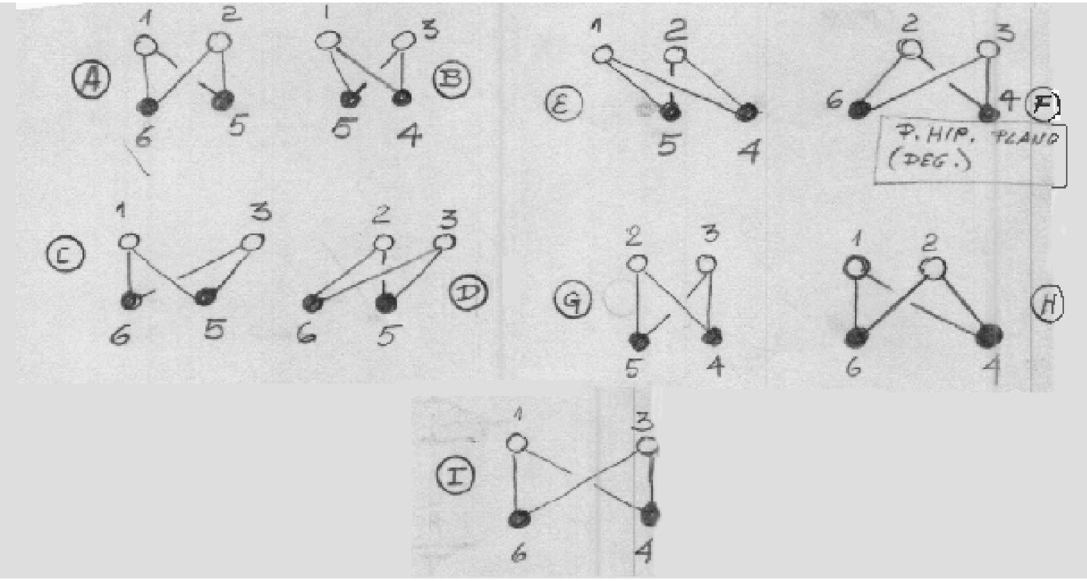
<u>Teorema de Kuratowski</u>

La condición necesaria y suficiente para que un grafo sea plano es que no admita subgrafos ni del tipo $K_{3,3}$ ni del tipo K_5.

La planaridad de un grafo de relaciones entre elementos prefijados de un proyecto arquitectónico es fundamental para su realización en planta. Estas relaciones pueden ser de acceso físico (puertas, vanos, pasillos, etc.); acceso visual (ventanas, mamparas, etc.); orientación geogáfica (Norte, Sur, Este y Oeste), etc. Es preciso tener en cuenta que a cada croquis le corresponde (a menos de un isomorfismo) un grafo de adyacencias y un grafo de adyacencias no plano no puede corresponder a una distribución real en planta.

2. JERARQUIZACION DEL ESPACIO

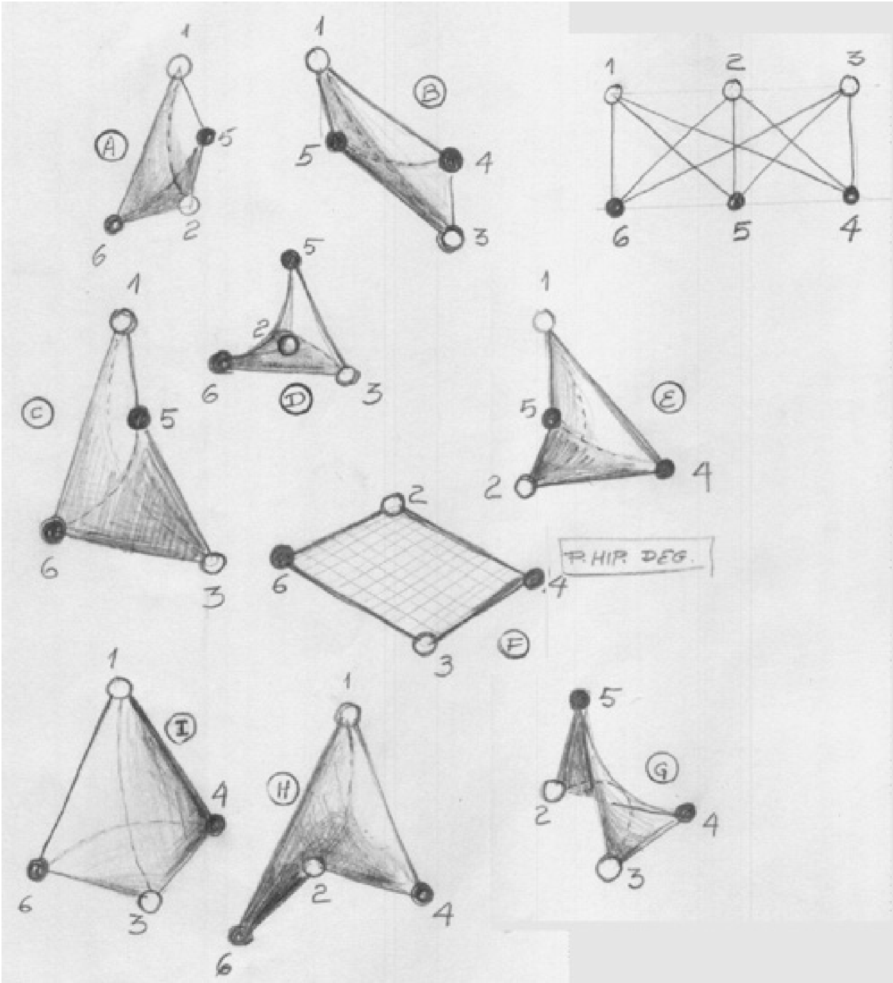
Si ahora tomamos los seis vértices del $K_{3,3}$ y los unimos de a cuatro (ver Fig. 1.7), se forman nueve paraboloides hiperbólicos en el espacio de tres dimensiones.



Para hallar la curva intersección de dos de dichos paraboloides hiperbólicos, consideremos los seis vértices con coordenadas:

A(0,y,0) B(0,-y,0) P(-x,0,z)

Q(x,0,z) R(0,0,z’) S(0,0,z’ + h)



y tomemos los paraboloides hiperbólicos determinados por los puntos SQAP y SQAR. Considerando parámetros $\mu_1 \lambda_1$ para el primero y $\mu_2 \lambda_2$ para el segundo, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\mu_1 [(1-\lambda_1) S + \lambda_1 P] + (1-\mu_1)[(1-\lambda_1) Q + \lambda_1 A] =$$

$$= \mu_2 [(1-\lambda_2) S + \lambda_2 R] + (1-\mu_2)[(1-\lambda_2) Q + \lambda_2 A]$$

Reordenando, tenemos:

$$Q[(1-\mu_1)(1-\lambda_1) - (1-\mu_2)(1-\lambda_2)] + A[(1-\mu_1)\lambda_1 - (1-\mu_2)\lambda_2] +$$

$$+ S[\mu_1 (1-\lambda_1) - \mu_2 (1-\lambda_2)] + \mu_1 \lambda_1 P - \mu_2 \lambda_2 R = 0.$$

Las ecuaciones de la curva intersección resultan:

$$\mu_1 = (1-\lambda_1) / (1+\lambda_1)$$

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 / (1+\lambda_1)$$

$$\mu_2 = 1 - \lambda_1$$

donde $0 < \mu_I \lambda_I < 1$.