# LAS TESELAS DE PENROSE COMO GENERADORAS DE AGRUPAMIENTOS DE FORMAS ARQUITECTONICAS MODULARES

**Arq. Roberto Serrentino**
**Arq. Ricardo Borsetti**
Laboratorio de Sistemas de Diseño
Facultad de Arquitectura y Urbanismo
Universidad Nacional de Tucumán
Avenida Roca 1800, CP 4000, Tucumán, Argentina
Teléfono: (0054)-(0381)-436-4093 Interno 146
Fax: (0054)-(0381)-436-4141
E-mail: labsist@herrera.unt.edu.ar
rserrentino@arnet.com.ar
rborsetti@herrera.unt.edu.ar

## Resumen

Considerando a los teselados del plano como un disparador creativo que contribuye al diseño de formas modulares, se desarrolla un procedimiento para agrupar formas de uso arquitectónico. El caso particular que se estudia en este artículo, corresponde a los denominados teselados de Penrose, los que teselan aperiódicamente, admitiendo el cubrimiento del plano sin utilizar un patrón de repetición a distancias constantes.

Se analizan los procedimientos y reglas para su generación geométrica y su fractalización. Se propone una técnica para generar teselados aperiódicos bidimensionales que sirvan como base de extrucción y/o de inserción de formas modulares tridimensionales, tendientes a la estandarización constructiva sin restringir la variedad de casos. Mediante técnicas digitales se analizan estructuraciones de agrupamiento lineal y central. Se ejemplifican ambas tipologías en distintos niveles de abstracción.

## Abstract

Considering plane tessellation as a creative trigger that contributes to modular form design, a procedure to group 2D shapes and architectural 3D forms is developed. The particular case studied in this article is about Penrose tilings, which tessellate no-periodically, admitting a covering of the plane without using a constant distance repetition pattern.

Procedures and rules for geometric generation and fractalization are analyzed. A technique to generate aperiodic tilings is proposed, so they will be used as a geometric precise support for the insertion of architectural objects that follow predetermined dimensional patterns, looking for constructive standardization without restricting diversity of cases. Using digital techniques, linear and central structures of groupings are analyzed. Both typologies are exemplified in various abstraction levels.

## Introducción

La teoría de teselados, de origen geométrico-matemático, ha obtenido importantes logros en los últimos años especialmente en aplicaciones a otras disciplinas tales como la arquitectura y el diseño. El presente trabajo tiene el propósito de operar con formas modulares que conformen teselados aperiódicos, aprovechando las técnicas digitales para la generación de agrupamientos arquitectónicos. Considerando a este sistema de agrupamiento un disparador creativo de fácil manejo digital, se desarrolla un procedimiento en el que el plano euclidiano sirve como base de extrucción y/o de inserción de objetos tridimensionales, cuyas formas se ajustan modularmente a una trama que además tiene la propiedad de preservar proporción áurea entre sus componentes.

Las teselas de Penrose admiten teselaciones aperiódicas si se establecen ciertas reglas de correspondencia. Si se omiten las reglas, es posible cubrir todo el plano mediante la repetición de un patrón a distancias constantes, obteniéndose teselaciones periódicas. Las técnicas digitales facilitan la producción de grupos de teselas tanto si se opera automatizando la generación de casos mediante un algoritmo programado, o simplemente utilizando las herramientas provistas por algún CAD.

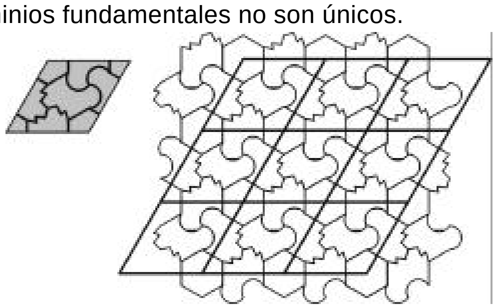
En el texto, al asignarle nombres a las configuraciones básicas, se ha optado por respetar la terminología original en inglés (asignada por R. Penrose (1) o por otros matemáticos estudiosos del tema, como J.H.Conway (2), B.Grümbaum y G. Shephard (3). Se acompaña entre paréntesis la traducción al castellano.

## Conceptos y Definiciones

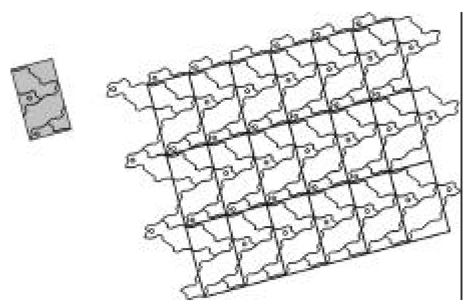
Un teselado plano T es una familia enumerable de conjuntos cerrados de objetos denominados teselas (baldosas), que cubren una superficie sin superponerse. La palabra tesela viene del latín "tessellae", nombre dado por los romanos a las pequeñas baldosas usadas en pavimentos y paredes en la antigua Roma. Geométricamente, una tesela es una región plana con estructura laminar, cuyo borde está limitado por una curva cerrada compuesta por segmentos de línea.

Si dos teselas son del mismo tamaño y forma decimos que son congruentes. Si P es un subconjunto del teselado T de manera tal que no haya 2 teselas en P que sean congruentes, entonces decimos que cada tesela de P es una prototesela, o tesela prototipo.

Un teselado periódico es aquel que permite delimitar en él una región que pavimenta el plano por traslación, desplazando la ubicación de la región sin someterla a giros ni simetrías. En otras palabras, un teselado es periódico cuando es posible encontrar un patrón de repetición a distancias constantes: significa poder construir una latice de paralelogramos periódicos conteniendo motivos idénticos del teselado, tanto en sus bordes como en su interior. Tales paralelogramos periódicos constituyen dominios fundamentales. Observemos en la figura que dado un solo dominio fundamental, es posible recrear la teselación periódica "copiando" (copying), "trasladando" (translating) y "pegando" (pasting), para usar la terminología común en sistemas digitales gráficos. Nótese que los dominios fundamentales no son únicos.



(a)



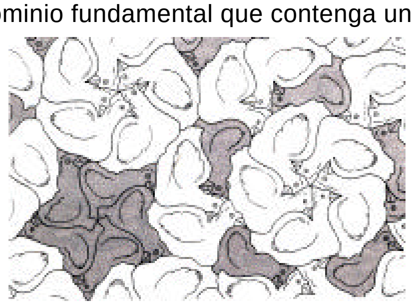
(b)

**Figura 1**

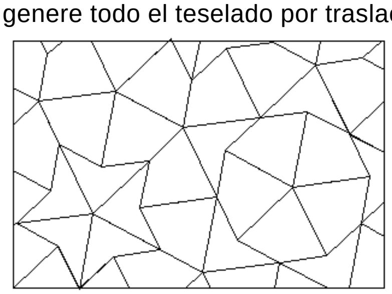
(a) Un teselado periódico dihédrico (dos clases de teselas). A la izquierda , un dominio fundamental con forma de paralelogramo.

(b) Un teselado periódico monohédrico (una sola clase de tesela). A la izquierda, un dominio fundamental rectangular.

Un teselado aperiódico es aquel que no permite encontrar un patrón de repetición a distancias constantes. Usando los conceptos del párrafo anterior se define que un teselado es aperiódico cuando no es posible encontrar un dominio fundamental que contenga un patrón de repetición que genere todo el teselado por traslación.



**(a)**



**(b)**

**Figura 2**

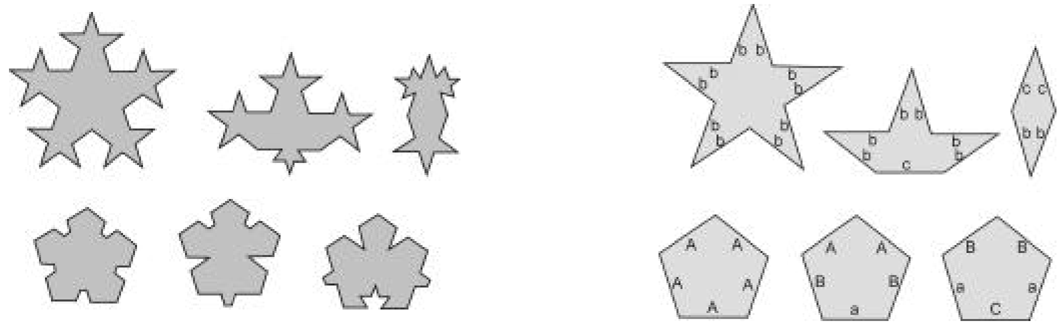
(a) Un teselado aperiódico de Penrose con un diseño (dos tipos de aves)

(b) Síntesis geométrica mediante "Kites and Darts" , del mismo diseño que la figura de la izquierda.

## Las teselas de Penrose

Ejemplos de conjuntos de prototeselas que admiten infinitos teselados del plano sin ser periódicos, son los llamados teselados de Penrose. En efecto, hacia los años 1973-74, Roger Penrose, matemático de la Universidad de Oxford, descubrió tres conjuntos de prototeselas aperiódicas.

• **El primer conjunto al que denominamos P1**, consiste en 6 prototeselas basadas en rombos, pentágonos regulares, estrellas de cinco puntas y medias estrellas.



(a) (b)

**Figura 3**

(a) seis prototeselas de Penrose correspondientes al conjunto aperiódico P1

(b) mismo conjunto P1 eliminando los detalles en las aristas y reemplazándolos por letras

En estas prototeselas hay tres clases de proyecciones con sus correspondientes indentaciones. Si se omitieran las modificaciones sobre los lados de la figura base, y se reemplazaran por símbolos, (ejemplo: las letras **a, b, c** y las mayúsculas **A, B, C**), la condición de correspondencia para estas teselas marcadas es que la **a** debe calzar con la **A**, la **b** con la **B** y la **c** con la **C**. Por supuesto que si no se aplican estas condiciones de correspondencia, las teselas del conjunto **P1** admiten teselados periódicos.

• **El segundo conjunto al que denominamos P2,** consiste en dos poligonales cerradas de cuatro lados: una cóncava a la que llamaremos *"dart"* (dardo) y otra convexa con forma de barrilete a la que denominaremos *"kite"* (cometa). Este par de figuras se deducen de un rombo cuyos ángulos internos son de 72 y 108 grados.

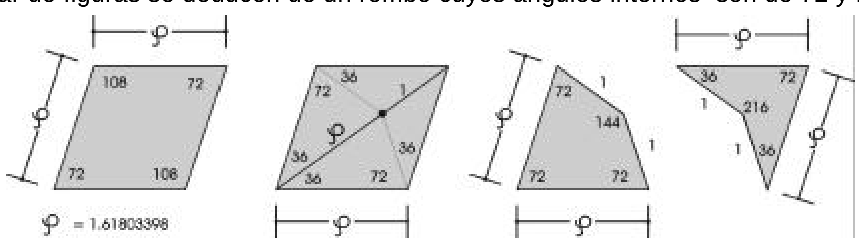



**Figura 4**

Para obtener las teselas del conjunto P2 se procede :

1.- Se traza un rombo de lado $\varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2$

2.- Se traza la diagonal mayor y se la divide según la razón áurea $(1 + \sqrt{5}) / 2 = 1.61803398$

3.- Se une el punto divisorio de la diagonal con los vértices obtusos del rombo.

4.- Observemos que:

- cada uno de los segmentos rectilíneos mide 1 o $\varphi$
- los ángulos son de 36, 72, 108 , 144 o 216 grados (todos múltiplos de 36 grados)

Como nuestra intención es producir teselados no periódicos, debemos evitar unir los "kites" y los "darts" de manera tal que formen un rombo (figura que da un embaldosado periódico). Por lo tanto es necesario una vez más establecer condiciones de correspondencia entre las piezas. Para evitar que se adosen de manera no permitida lados de la misma longitud, se puede fijar reglas.

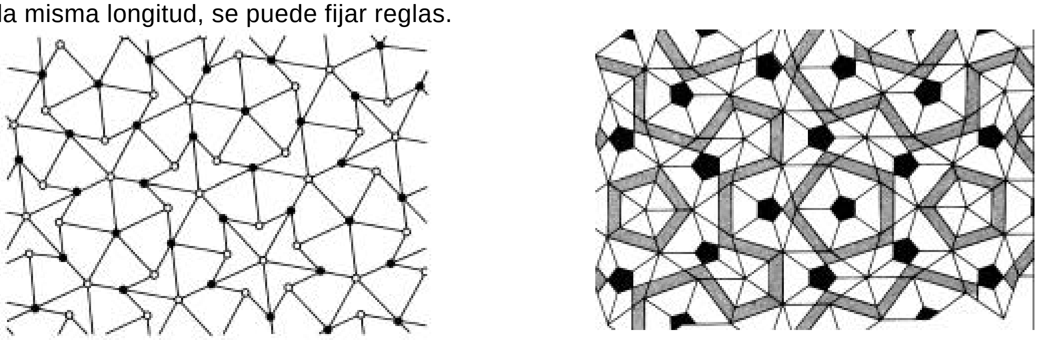
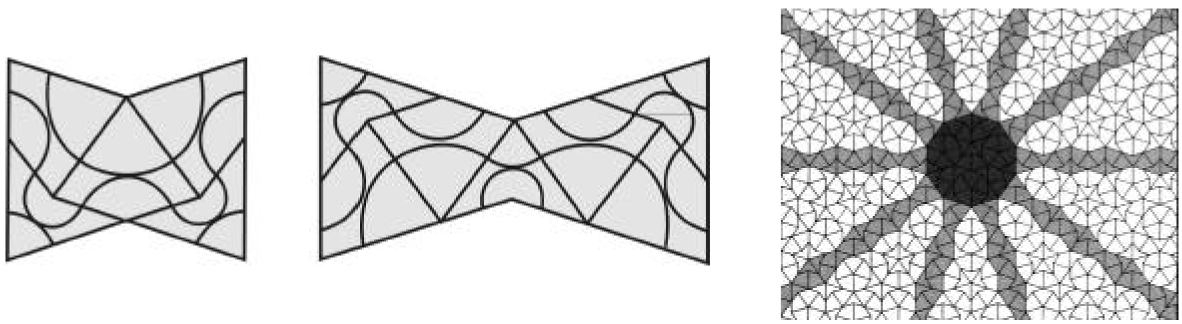


**Figura 5**

**a.-** proyecciones e indentaciones con la misma forma, que impongan un calce perfecto entre lados permitidos.
**b.-** trazar sobre cada tesela polilíneas modulares de dos colores, haciendo que cada tramo de polilínea corte a los lados y al eje de simetría en razón áurea. Al adosa lados iguales entre teselas es condición necesaria enlazar polilíneas del mismo color.
**c.-** marcar los vértices con puntos de dos colores en lugar de hacerlo con letras.
**d.-** trazar sobre cada tesela arcos circulares de dos colores , haciendo que cada arco corte a los lados y al eje de simetría en razón áurea. La regla consiste en que al adosar lados es preciso enlazar arcos del mismo color.
**e.-** rótulos en los vértices con dos letras diferentes, por ejemplo A y B, estableciendo la regla que al adosar lados solamente pueden entrar en contacto vértices con la misma letra.

Para construir un teselado de Penrose a partir del conjunto P2 ("kites y darts"), de forma más estables y rápidamente, si se hacen copias de formas mayores, compuestas por teselas unitarias, que por repetición permiten teselar cualquier motivo infinito. Hay dos tendencias de estructuración de estas formas mayores: lineal y central.

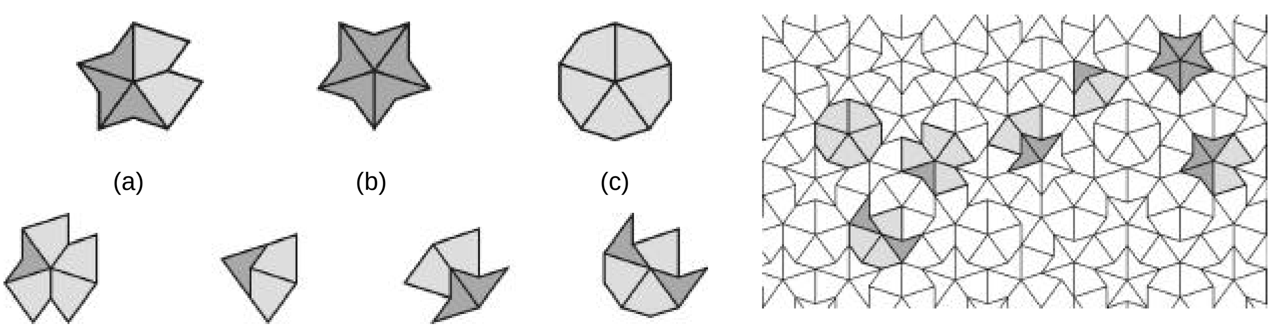
**<u>La estructuración lineal</u>** se presenta cuando se combinan secuencialmente las composiciones M1 y M2 de la figura. A la configuración M1 la denominaremos moño corto, y a M2 moño largo. Una tira longitudinal de estos moños compone un *"worm"* (gusano), estando el número de moños largos en proporción áurea con respecto a los moños cortos. Cada universo de Penrose contiene un número infinito de radios arbitrariamente grandes, con estructura lineal.



(a) (b) (c)

**Figura 6**
(a) agrupamiento de teselas que generan un moño corto
(b) agrupamiento de teselas que generan un moño largo
(c) estructuras lineales del tipo "worms" que parten de un decágono central en un teselado P2

**<u>La estructuración central</u>** se obtiene mediante la construcción de "vertex stars" (estrellas en los vértices), vecindad de teselas alrededor de un vértice aislado, y su expansión radial siguiendo las reglas de correspondencia. Se obtienen 7 clases de vecindad al explorar exhaustivamente los tipos de configuraciones en estrella que aportan los "kites y darts" alrededor de un vértice.



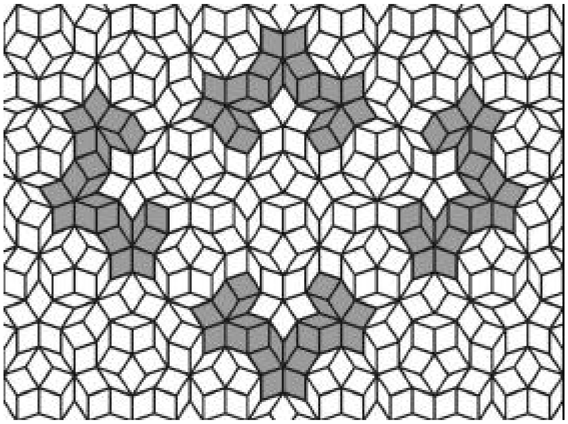
(a) (b) (c)
(d) (e) (f) (g) (h)

**Figura 7**
(a) king (rey), (b) star (estrella), (c) sun (sol), (d) queen (reina), (e) as (as del mazo de naipes), (f) deuce (dos), (g) jack (sota)
(h) las siete vecindades insertadas en un teselado

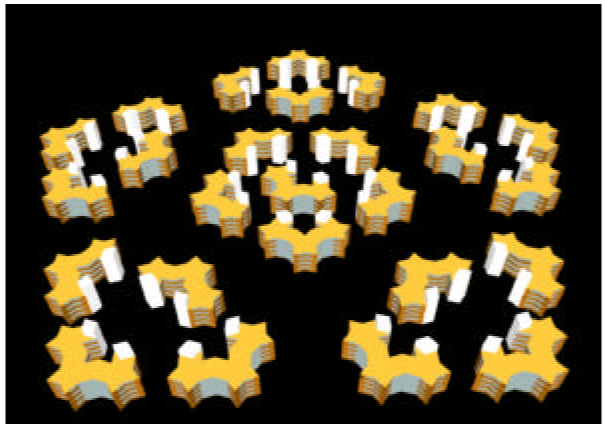
De estas siete configuraciones sólo dos tienen simetría pentagonal perfecta: el caso b, "star" (estrella) y el caso c, "sun", (sol). El sol no impone la colocación de ninguna otra pieza a su alrededor. Pero al agregar piezas preservando la simetría pentagonal nos vemos obligados a construir el motivo de la figura 8. Esta pavimentación está unívocamente determinada hasta el infinito, por lo que a partir de ella podemos seleccionar diferentes estructuras centrales para uso arquitectónico.

## Conclusiones

Desde un punto de vista arquitectónico, los teselados de Penrose permiten estructurar configuraciones modulares abstractas, para analizar y resolver agrupamientos de formas.  Si bien los ángulos de las piezas corresponden a valores rigurosos, la versatilidad de ubicación de unas con respecto a otras y las condiciones de correspondencia entre lados de la misma longitud aseguran la ausencia de periodicidad de las composiciones, obteniéndose una sorprendente variedad de formas. Los conceptos de inflación y deflación, en estrecha vinculación con los fractales, permiten estudiar recursivamente agrupamientos en distintos niveles de abstracción y en distintas escalas. (agrupamiento de habitaciones, edificio aislado, agrupamiento de edificios, conjunto urbano, etc.).



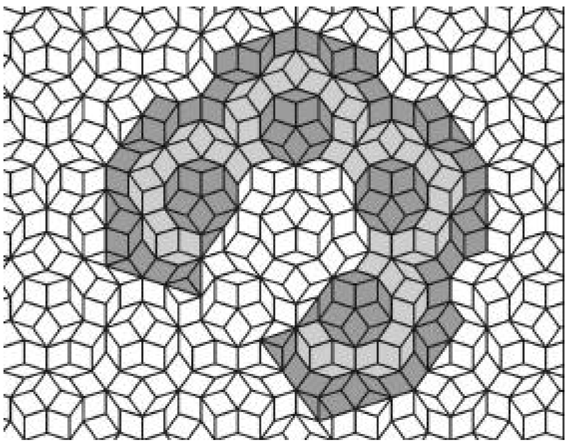
(a)



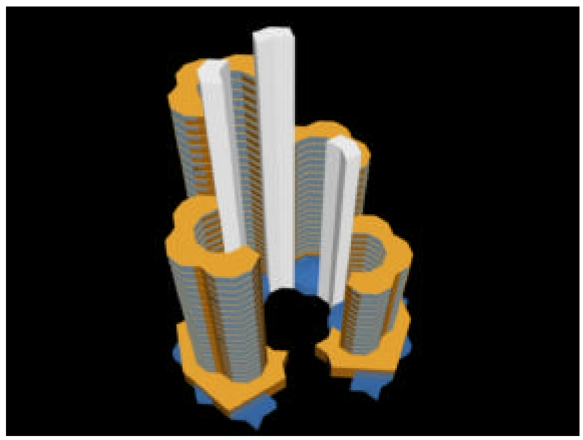
(b)

**Figura 15**
(a) generación de idea a partir de un teselado tipo P3
(b) agrupamiento de bloques de viviendas obtenidas como resultado de esa generacion

La proporción áurea en que se presentan las cantidades de  elementos componentes, sumada a la proporción áurea entre las dimensiones de los módulos, impone una "irracionalidad ordenada", comparable a la serie numérica de Fibonacci. En este sentido queda abierta la posibilidad de futuras exploraciones de los teselados de Penrose para encontrar nuevas aplicaciones arquitectónicas Las siguientes imágenes muestran algunos resultados al aplicar las tramas de Penrose como soportes geométricos y bases de extrucción de diferentes agrupamientos arquitectónicos.



(a)



(b)

**Figura 16**
(a) generación de idea a partir un teselado tipo P3
(b) torres de oficinas obtenidas como resultado de esa generacion

## Referencias


*(1)* R. Penrose: ´´ The Role of Pure and Applied Mathematical Research´´, *en Bulletin of the Institute of  Mathematics and the Applications*, 1974
´´ Pentaplexity : A Class of Nonperiodic Tilings of the plane´´ , en *Eureka*, 1978
(2) J.H.Conway*:* ´´Triangle Tesselations of the Plane´´, 1965
(3) B.Grümbaum, Branko y G. Shephard: ´´Some Problems on Plane Tilings´´ , en *The Mathematical Gardner* ,1981